ACTES DE LES IV TROBADES D'HISTÒRIA DE LA CIÈNCIA I DE LA TÈCNICA
(ALCOI-BARCELONA, SCHCT, 1997), 619-627

ÀLGEBRA, FÍSICA I GEOMETRIA EN LA CREACIÓ DEL CÀLCUL VECTORIAL AL SEGLE XIX

Josep Manel Parra Serra
Departament de Física Fonamental. Laboratori de Física Matemàtica-IEC
Universitat de Barcelona

Paraules clau: vectors, quaternions, àlgebra vectorial, geometria, Dedekind, Grassman, Clifford

Algebra, Physics and Geometry in the XIX Century Inception of Vector Calculus

Summary: *An outline of the divergent approaches to the foundations of the geometrical science sustained by Dedekind and Grassmann is given. On the basis of Maxwell's ideas around the tight links between mathematics, geometry and physics, as well as the different corresponding scientific mentalities, the case is made for a wider application of Grassmann's theory and points of view in basic geometrical education, with inclusion of a sufficient introduction to a comprehensive vector algebra.*

Keywords: *Vectors, Quaternions, Vector Algebra, Geometry, Dedekind, Grassmann, Clifford*

1. Introducció

És freqüent, i fins a cert punt natural, prendre com a indicador de progrés en la història de les matemàtiques les successives extensions del concepte de nombre. Dels nombres naturals, associats a l'operació de comptar, es passa a les fraccions que permeten establir proporcions i unitats arbitràries de mesura, o als nombres amb signe que permeten establir coordenades en el temps, l'espai o en qualsevol magnitud que presenti dos sentits oposats de variació. La posterior extensió al reals permet dotar de «continuïtat» el conjunt de nombres i modelitzar ja sense aproximacions les estructures geomètriques i temporals. Finalment, els nombres complexos permeten una representació «numèrica» d'operacions geomètriques com la translació i rotació del pla. Aquestes extensions numèriques han anat aparellades amb un ús menys restrictiu de les operacions matemàtiques fonamentals de producte i de suma, així com del pas al límit i l'extracció d'arrels. La història de la matemàtica del segle XIX ofereix exemples que poden relativitzar i posar en dubte la rellevància de la fonamentació «aritmètica», pel que fa a una part tan important com és la relacionada amb la geometria i el càlcul vectorial.

Començarem amb l'exposició de les idees de Dedekind, que exemplifiquen a la perfecció el paradigma «numèric» i la seva «invasió» sobre els fonaments de la geometria. Després de veure com a la física el recurs a la geometria ha estat considerat com una necessitat primària que transcendeix el pur càlcul numèric, exposarem les línies directrius del paradigma geomètric representat per Grassmann. La conclusió fa referència a la possibilitat de reconsiderar i incorporar les aportacions de Grassmann en el marc de l'ensenyament actual de les matemàtiques.

2. Dedekind i els nombres reals

La consideració dels nombres reals (el problema de la incompletesa o discontinuïtat dels nombres racionals) és freqüentment considerat de matemàtica no elemental, alhora que constitueix el primer tema de les matemàtiques del Batxillerat. L'extracció d'arrels, plantejada per exemple a partir del teorema de Pitàgores, no és suficient per conduir-nos al cos dels nombres reals (que estan més enllà de l'abast de qualsevol calculadora i de qualsevol acte de mesura!). Hi ha, però, una construcció dels reals força natural, si la comparem amb la molt més sofisticada que utilitza les successions de Cauchy. És aquesta la dels talls de Dedekind (1872) que, pel seu caràcter «paradigmàtic» passem a detallar:

> «De la més gran importància és el fet que en la línia recta *L* hi ha un nombre infinit de punts que no es corresponen amb cap nombre racional ...
> Si ara, com és el nostre desig, intentem descriure aritmèticament tots els fenòmens de la línia recta, el domini dels nombres racionals resulta insuficient i esdevé absolutament necessari que l'instrument **R**, construït mitjançant la creació dels nombres racionals, sigui millorat de manera essencial amb la creació d'uns nous nombres de manera que el domini dels nombres guanyi la mateixa completesa, o podem dir-ho d'una vegada, la mateixa *continuïtat*, que la línia recta. ...
> La comparació anterior del domini **R** dels nombres racionals amb la línia recta ens ha dut al reconeixement de l'existència de salts, d'una certa incompletesa o discontinuïtat del primer, mentre que adscrivim a la línia recta completesa, absència de salts, o continuïtat. En què, doncs, consisteix aquesta continuïtat? Tot ha de dependre de la resposta a aquesta qüestió, i només a partir d'ella obtindrem una base científica per a la investigació de *tots* els dominis continus. ...
> Durant molt de temps vaig meditar sobre aquest problema en va, però finalment vaig trobar el que estava buscant. Aquest descobriment serà, potser, apreciat diferentment per diferents persones; la majoria pot trobar la seva substància lloc comú. Consisteix en el que segueix. En la secció precedent vàrem notar el fet que tot punt *p* de la línia recta en produeix una separació en dues porcions de manera que tot punt d'una porció jeu a l'esquerra de tot punt de l'altra. Trobo l'essència de la continuïtat en el recíproc, i.e., en el següent principi:
>
> *Si tots els punts de la línia recta cauen en dues classes de manera que tot punt de la primera classe jeu a l'esquerra de tot punt de la segona classe, llavors hi ha un i només un punt que produeix aquesta divisió de tots els punts en dues classes, separant ell la línia recta en dues porcions* (Dedekind, 1901: 8-11).»

De la constatació força natural que tot punt separa la recta en dues porcions (Russell refinà més tard el raonament precisant en quina de les dues porcions cal considerar inclòs el punt en qüestió), Dedekind extrau una formulació que, tautològica sobre la recta, esdevindrà operativa sobre el conjunt dels «nombres»: de la mateixa manera que tota divisió en dues classes ordenades *esquerra/dreta* de la línia recta caracteritza completament un punt de la recta, tota divisió o tall dels nombres en dues classes ordenades *menor/major* caracteritza completament un nombre real. Així, poc més endavant i després d'algunes manipulacions aritmètiques que mostren com el tall definit per (A_1,A_2) amb A_2 consistent en tots els nombres racionals de quadrat més gran que un enter D que no sigui quadrat perfecte, no pot ésser produït per un nombre racional –un exemple amb més de dos mil anys d'antiguitat–, conclou:

> «En aquesta propietat que no tots els talls poden ser produïts per nombres racionals consisteix la incompletesa o discontinuïtat del domini **R** dels nombres racionals. Sempre que hem de tractar amb un tall (A_1,A_2) que no és produït per un nombre racional, creem un nou nombre *irracional* a el qual considerem com completament definit per aquest tall (A_1,A_2); direm que el nombre a correspon a aquest tall, o que produeix aquest tall. A partir d'ara, per tant, a tot tall definit correspon un nombre racional o irracional definit, i considerarem dos nombres com *diferents* o *desiguals* sempre i només quan corresponguin a talls essencialment diferents (Dedekind, 1901: 15).»

A partir d'aquí Dedekind procedeix a establir les operacions sobre els nombres reals i l'anàlisi infinitesimal.

La memòria de Dedekind té, a més de la seva claredat didàctica, el mèrit afegit de declarar explícitament el «paradigma numèric» esmentat al començament. Hem vist com l'*essència de la continuïtat* la capta i l'abstreu directament de la línia recta (sigui aquesta la de la geometria d'Euclid o la de la mecànica dels sistemes unidimensionals. No obstant això, trobem en Dedekind la més ferma afirmació de la independència –i fins i tot superioritat– del univers de l'aritmètica, del món platònic ideal dels nombres, sobre els móns tangibles de la geometria i la física. Així, després d'afirmar que la «línia recta L és infinitament més rica en *punts-individus* que el domini **R** dels nombres racionals ho és en *nombres-individus*, declara que:

> «La manera en la qual habitualment s'introdueixen els nombres irracionals està basada directament en la concepció de magnituds extensives –que en si mateixes no es defineixen acuradament enlloc– i explica el nombre com a resultat de mesurar una tal magnitud per una altra de la mateixa mena.* (* L'aparent avantatge de la generalitat d'aquesta definició de nombre desapareix tan aviat com considerem els nombres complexos). En lloc de procedir així exigeixo que l'aritmètica es desenvolupi a partir d'ella mateixa.
> Pot donar-se per segur que, de forma general, comparacions d'aquesta mena amb nocions no aritmètiques han ofert l'ocasió immediata per a l'extensió del concepte de nombre (encara que aquest no va ser certament el cas en la introducció dels nombres complexos); però aquest fet no és certament suficient base per a introduir aquestes nocions foranies en l'aritmètica, la ciència dels nombres (Dedekind, 1901: 9-10).»

I tot just ha abstret l'essència a principi de continuïtat de les consideracions sobre la línia recta, afirma:

> «L'assumpció d'aquesta propietat de la línia no és més que un axioma pel qual atribuïm a la línia la seva continuïtat, mitjançant el qual trobem continuïtat en la línia. Si l'espai té una existència real, *no* necessàriament ha de ser aquesta contínua; moltes de les seves propietats serien les mateixes encara que fos discontinu. I si sabéssim amb certesa que l'espai és discontinu res no ens impediria, si així ho desitgéssim, d'omplir els seus forats, en el pensament, i fer-lo continu; aquest omplir-lo consistiria en la creació de nous punts-individus i hauria d'ésser efectuada d'acord amb el principi abans esmentat (Dedekind, 1901: 12).»

Finalment, per eliminar tota possible ambigüitat, en un assaig de l'any 1888 titulat *Sobre el significat dels nombres* clarifica:

> «... però en el fet que en la seva exposició (Dini, 1878) s'esmenta el meu nom, no en la descripció del fenomen purament aritmètic del tall sinó quan l'autor discuteix l'existència d'una quantitat mesurable corresponent al tall, pot fàcilment portar a la suposició que la meva teoria es basa en la consideració d'aquesta mena de quantitats. Res tan lluny de la veritat. ...
> Tant més meravellós em sembla a mi que, sense cap noció de quantitat mesurable i simplement mitjançant un sistema finit de simples actes de pensament, l'home pugui arribar a la creació d'un domini numèric pur continu; i només a partir d'aquest mitjà, en la meva opinió, resulta possible fer clara i definida la noció d'espai continu (Dedekind, 1901: 37-38).»

El qüestionament de l'existència de l'espai enfront la inqüestionable existència de les creacions del nostre pensament és un tret característic d'un col·lectiu de pensament matemàtic que, desenvolupat al llarg del segle XIX s'ha establert com a corrent del tot majoritària en el segle XX. I en aquest col·lectiu la idea de nombre, en el més pur sentit platònic, hi juga un paper central: podem conèixer el món natural en la mesura que hi reconeixem, de manera sovint imperfecta, les idees reals del món matemàtic, construïdes a partir dels nombres naturals. Sorprenentment, la incompletesa d'aquest món, demostrada per Gödel el 1930, no ha fet variar substancialment la situació.

3. El món físic: Maxwell i la classificació de les magnituds

Robert Grosseteste (1168-1253) anticipant-se a la clàssica afirmació de Galileu a *Il Saggiatore* (1623), ja afirmà que «La utilitat de considerar línies, angles i figures és molt gran, ja que resulta impossible comprendre la filosofia natural sense elles. Totes les causes dels efectes naturals han d'expressar-se mitjançant línies, angles i figures, ja que altrament resulta impossible copsar la seva explicació». Recordem que per a Galileu el llibre de l'univers «està escrit en llengua matemàtica, i els caràcters són triangles, cercles i altres figures geomètriques, mitjans sense els quals resulta humanament impossible entendre res, sense els quals només podem agitar-nos vanament per un obscur laberint». Podem també recordar la cabdal importància de la geometria en l'obra de Kepler i, fins i tot, el paper fonamental de la geometria en l'obra de Newton i la seva postulació de l'espai absolut (de tipus euclidià) com a fonament de la seva mecànica.

Els indubtables triomfs i grans avenços de l'anàlisi creada per Leibniz i Newton i el desenvolupament de la geometria cartesiana (insatisfactòria per al propi Leibniz en no oferir una expressió simbòlica prou expressiva de les relacions geomètriques) feren retrocedir el pes relatiu de la geometria en els científics naturals dels segles XVIII i començaments del XIX. No obstant, al llarg de tot el XIX es succeeixen una llarga sèrie d'intents de desenvolupar una anàlisi geomètrica, que estengui al domini de la geometria els èxits que hom ha constatat en l'anàlisi (l'època està madura per a l'assoliment de les aspiracions de Leibniz). Hom pot consultar en aquest respecte els treballs de Gámez (1997), García Doncel (1984) i Parra (1993). Els primers èxits parcials s'assoleixen amb la consideració dels nombres complexos i dels quaternions, que passen (i poden) ser considerats com a «sistemes numèrics» que, en darrer terme, seran fonamentats sobre el conjunt de nombres naturals. Com a molt significativa d'aquesta tendència citem les dolgudes paraules de McAulay qui, el 1893, lamenta que:

> «Quan vaig enviar l'assaig (1887) vaig sentir el pressentiment que potser no hi havia cap persona a Cambridge que el pogués entendre sense molt de treball ... No és que a Cambridge no es cultivin els Quaternions *com un àlgebra*, però aquest cultiu no és Hamiltonià ... Hamilton considerava els Quaternions com un mètode *geomètric*, i és en aquest sentit que fins ara ha fracassat en trobar seguidors de vàlua residents a Cambridge (Crowe, 1967: 194).»

En contrast, la teoria de Grassmann és molt més general i, com veurem en el següent apartat, no assimilable a una construcció purament numèrica. El seu producte «progressiu» mitjançant el producte de dues línies genera un pla, representa una restitució del caràcter essencialment dimensional de la geometria grega que la geometria cartesiana havia eliminat. Però ara aquest caràcter dimensional, que ofegà la matemàtica grega en impedir avançar més enllà del cub, no imposa cap limitació a una matemàtica que, conscient del seu caràcter de ciència formal, no està limitada per la realitat de la natura. Malgrat fer notables contribucions a l'electromagnetisme i la mecànica l'obra de Grassmann fou pràcticament negligida i incompresa en el seu temps, i falsament recuperada pel físic Gibbs (Gibbs, 1886) en el seu càlcul vectorial que, amb una nul·la influència en el desenvolupament de la matemàtica ha esdevingut l'eina més característica i universal de la física del segle XX.

Les consideracions anteriors estan adreçades a considerar la conveniència de replantejar-nos de nou, avui, amb tota la seva vehemència, les consideracions que Maxwell, com a President, adreçà el 15-09-1870 a les seccions de Física i Matemàtica de la British Association:

> «D'entre tots els mètodes pels quals el matemàtic pot fer que els seus treballs siguin més útils a l'estudiant de la natura, el que crec que és en aquest moment més important, és la classificació sistemàtica de les quantitats ...
> No em refereixo aquí al fet que totes les quantitats, en tant que tals, estan subjectes a les regles de l'aritmètica i l'àlgebra i són, per tant, susceptibles d'ésser sotmeses a

> aquells àrids càlculs que representen, per a tantes ments, l'única idea que posseeixen de les matemàtiques ...
> Hi ha homes que, quan una relació o llei, per complexa que sigui, els és presentada de forma simbòlica, poden copsar el seu ple significat com una relació entre quantitats abstractes. A vegades aquests homes consideren amb indiferència l'afirmació subsegüent que realment existeixen a la natura quantitats que satisfan aquesta relació. La imatge mental de la realitat concreta sembla més aviat pertorbar-los que assistir-los en les seves contemplacions...
> N'hi ha d'altres que senten més goig en seguir les formes geomètriques, que dibuixen en el paper, o que construeixen en l'espai buit davant d'ells.
> Altres, finalment, no s'acontenten a menys que puguin projectar totes les seves energies físiques a l'escena que imaginen. Troben a quina velocitat els planetes corren per l'espai, i experimenten un deliciós sentiment d'excitació. Calculen les forces amb les quals s'atrauen els cossos celestes, i senten tensar-se els propis musculs amb l'esforç...
> Pel benefici de persones d'aquests diferents tipus, la veritat científica ha de presentar-se de diferents maneres, i ha d'ésser considerada com igualment científica, tant si apareix en la forma robusta i vivament acolorida d'una il·lustració física, com en la forma tènue i pàl·lida d'una expressió simbòlica.
> Em faltaria temps si intentés il·lustrar amb exemples el valor científic de la classificació de les quantitats. Només mencionaré el nom d'aquesta important classe de magnituds que posseeix direccionalitat a l'espai i que Hamilton ha anomenat vectors, i que forma la matèria del Càlcul dels Quaternions, una branca de les matemàtiques que, quan hagi estat completament compresa per homes del tipus il·lustratiu, i vestida per ells amb imatges físiques, esdevindrà, potser sota un nou nom, un poderosíssim mètode de comunicar veritable coneixement científic a persones aparentment mancades d'esperit calculístic (Maxwell, 1965: 218-220).»

A la llum d'aquestes consideracions sembla més que oportú completar la perspectiva «numerificadora» representada per aquí per Dedekind, per la perspectiva geomètrica de Grassmann que, no menys «matemàtica», presenta molts més punts de contacte amb les mentalitats «il·lustratives».

4. Grassmann i la matemàtica de les magnituds extensives

En el seva introducció a la teoria de l'extensió, Grassmann distingeix clarament la teoria formal, matemàtica, de les ciències reals a les quals s'aplica: la geometria, la cinemàtica, la mecànica. Així, després d'afirmar que les matemàtiques són la teoria de les formes (del pensament) ens diu que «abans de passar a la divisió de la teoria de les formes hem d'excloure una branca fins ara inclosa en ella, a saber, la geometria. ... la geometria, a l'igual de la mecànica, es basen en un ésser real, que per a la geometria és l'espai» (Grassmann, 1947: 22-23).

Pel que fa al lloc que ocupa la seva teoria de l'extensió en el domini sencer de la matemàtica ens diu que l'estudi de la variació contínua multivariada ha estat la darrera en poder-se desenvolupar, després de la teoria dels nombres (variació discreta univariada), la combinatòria (variació discreta multivariada), el càlcul diferencial (variació contínua univariada). Encara que la seva representació concreta (però limitada) que és la teoria de l'espai, pertanyi als temps més antics. Més endavant trobem una expressió encara més clara de la diferència entre la teoria formal que ell desenvolupa i la seva aplicació pràctica o real:

> «Com exemple prenem altra volta la teoria de l'espai. En aquesta es generen mitjançant dues direccions diferents, i a partir d'un element, tots els punts d'un pla, desplaçant l'element generador en ambdues direccions arbitràriament, i reunint conceptualment el conjunt de tots els punts (elements) així generats. El pla és, doncs, el sistema de segon grau; conté una quantitat infinita de direccions que depenen de les dues primitives. Agregant una tercera direcció independent es genera tot l'espai infinit (com a sistema de tercer grau); i més enllà d'aquestes direccions (lleis de variació) independents no és pot aquí anar, mentre que en la teoria pura de l'extensió la quantitat d'aquestes es pot augmentar fins a l'infinit (Grassmann, 1947: 30).»

Remarcable resulta la construcció-generació de l'espai geomètric mitjançant processos de variació i com l'abstracció-generalització d'aquests processos (de translació) porta de forma natural a una teoria general (la dels espais lineals o vectorials). Tan sols quan es quantifiquen els processos de variació contínua es «numerifica» la magnitud extensiva, obtenint l'espai real n-dimensional genèric, els elements del qual són les matrius numèriques unidimensionals conegudes com a «vectors fila» o «vectors columna». I tan sols quan es concreten tots i cadascun dels processos de variació independents ens trobem amb una aplicació de la teoria general de l'extensió a una ciència real (geometria, mecànica, termodinàmica) o a una altra branca de la matemàtica (polinomis en una o més indeterminades, funcions, etc.).

Però la generació d'aquests espais de magnituds extensives ofereix més possibilitats que la pura estructura lineal de l'espai vectorial axiomatitzat com a conjunt ordenat de n nombres reals sotmesos a una llei interna de suma i un producte per escalars:

> «12. La diversitat de les lleis (de generació) requereix per a la seva determinació exacta d'una altra llei, gràcies a la qual es passa d'un sistema (de generadors) a un altre. El pas d'un sistema als altres forma, doncs, un segon esglaó natural en el camp de la teoria de l'extensió, i amb ell es tanca la descripció elemental d'aquesta ciència.
> En la teoria de l'espai correspon a aquest passatge d'un sistema als altres la rotació, i amb ella es relaciona la magnitud angular, la longitud absoluta, la perpendicularitat, etc.; la qual cosa serà inclosa en la segona part de la teoria de l'extensió (Grassmann, 1947: 30).»

Hem d'esmentar que degut a la nul·la recepció del seu treball aquesta segona part no es desenvolupà de la manera prevista inicialment en (Grassmann, 1947: 17). Amb tot hi trobem, com succeí abans amb Leibniz respecte la possibilitat, assenyalada l'any 1679 en una sèrie de cartes a Huygens, d'una anàlisi lineal específicament geomètrica (Leibniz, 1889), una clara anticipació del que serien el treballs de Clifford (1876,1878), Lipschitz (1880) i, fins i tot, el famós «Programa d'Erlangen» de Felix Klein. Per a tots ells la geometria de l'espai ordinari està fonamentalment determinada pel grup de rotacions, i aquest a la noció de distància. Aquesta mateixa noció portà a Minkowski a afirmar la realitat absoluta de l'espai-temps en substitució de l'espai i temps absoluts newtonians d'acord amb les mesures físiques relacionades amb les ones electromagnètiques de Maxwell (Minkowski, 1908). Aquestes mostraren que el pas dels generadors de l'extensió espai-temporal associats a un sistema de referència als dels sistemes equivalent d'acord amb el principi de relativitat es descriu mitjançant les transformacions de Lorentz que preserven una nova «distància d'univers» que és diferència de quadrats en lloc de suma de quadrats.

5. Conclusió

Podríem dir que la construcció de Grassmann transcendeix el reductivisme numèric que hem observat a l'obra de Dedekind, reclamant una parcel·la pròpia de la ciència matemàtica. Una parcel·la en la qual les operacions de translació, rotació, i les seves generalitzacions abstractes juguen un paper tan essencial i primari com el conjunt de nombres reals. És d'assenyalar el notable interès i l'alta valoració de Peano per l'obra de Grassmann (Peano, 1900) totalment negligida pels defensors de la fonamentació axiomaticonumèrica. Alhora, en plantejar clarament les relacions entre la ciència matemàtica i les ciències experimentals a les quals s'aplica, permet avançar decisivament en la direcció abans assenyalada per Maxwell com a prioritària. Tal com indicà clarament Clifford (1878: 352), en un paràgraf incomprensiblement negligit per Crowe (1967: 138-143), les diverses magnituds vectorials de Maxwell, que no acabaven de trobar el seu encaix perfecte en la teoria dels quaternions de Hamilton (1853), es corresponen exactament amb les magnituds vectorials i bivectorials de Grassmann, constituint aquestes darreres l'explicació més natural, completa i generalitzable, dels quaternions de Hamilton.

Al nostre entendre l'aplicació de les idees de Grassmann desenvolupada per Clifford sota el nom genèric d'àlgebra geomètrica constitueix la base per a una introducció elemental a la teoria de l'extensió. Una introducció en la qual tenen un paper fonamental com aplicacions paradigmàtiques la geometria del pla, de l'espai i de l'espai-temps (aviat farà cent anys que l'Univers és «relativista»!)

En uns moments en els quals es replanteja l'ensenyament de la geometria del pla i de l'espai en el nou batxillerat, havent entrat en qüestió quelcom tan fonamental com és el «producte vectorial» , sembla clar que un més ampli coneixement de la pròpia història de la matèria i de les dificultats inherents a les diverses transposicions didàctiques (Patronis, 1997) poden enriquir el debat i el propi ensenyament. Especial atenció mereixen en aquest respecte les consideracions que Grassmann feu el 1844, en el prefaci a la seva obra fonamental:

> «... Mitjançant les aplicacions a la física crec haver mostrat la importància, o més bé la necessitat, de la nova ciència i la seva anàlisi. Penso mostrar algun cop que, en la seva forma concreta, és a dir, aplicada a la geometria, és aquesta ciència un excel·lent tema d'ensenyament que pot ésser tractat de forma completament elemental.
> ... Quan, per tant, assigno tota la seva importància a aquesta nova ciència ... no crec que se'm pugui titllar de vanitós; perquè la veritat reclama els seus drets; ella no és obra d'aquell que la descobreix o assenyala la seva importància; existeix en si ma-

teixa; i restringir-li els seus drets en virtut d'una falsa modèstia, és una traïció a la veritat (Grassmann, 1947: 18-19).»

Agraïments: Aquest treball ha estat realitzat dins del marc del projecte del Comissionat per a Universitats i Recerca 1995SGR00066.

Bibliografia

CLIFFORD W.K., (1876), «On the Classification of Geometric Algebras (unfinished)». En *Mathematical Papers by W. K. Clifford*, R. Tucker (ed.), London, 1887, 397-401.

CLIFFORD W.K. (1878), «Applications of Grassmann's extensive algebra», *Amer. J. Math. 1,* 350-358.

CROWE, M.J. (1967), *A History of Vector Analysis*, Notre Dame Press; (Dover, N.Y., 1994.)

DEDEKIND, R. (1901), *Essays on the theory of numbers*, Open Court; (Dover, N.Y., 1963.)

GAMEZ, C. (1997), «200 anys de la representació geomètrica dels imaginaris». En aquestes mateixes actes.

GARCÍA DONCEL, M. (1984), «Orígens físics de l'anàlisi vectorial». En: CASTELLET, M. (ed.): *El desenvolupament de les matemàtiques al segle XIX*, Arxius de la Secció de Ciències LXXV, I.E.C., Barcelona, 136-180.

GIBBS J.W. (1886), «On Multiple Algebra», *Proc. Am. Ass. Adv. of Science 35*, 37-66; també a *The Scientific Papers of J. W. Gibbs*, vol. 2, Dover, N.Y. 1961.

GRASSMANN, H. (1947), *Teoría de la Extensión*, Buenos Aires, Espasa-Calpe Argentina.

HAMILTON W.R. (1853), *Lectures on Quaternions*, Dublin, Hodges and Smith.

LEIBNIZ, G.W. (1889), *Der Briefwechsel von Gottfried Wilhelm Leibniz mit Mathematikern*, Gerhardt C.I. (ed.), Mayer and Müller, Berlin; (Georg Olms Verlag, Hildesheim, 1987.) 568-585.

LIPSCHITZ, R. (1880), «Principes d'un calcul algébrique qui contient comme espèces particulières le calcul des quantités imaginaires et des quaternions», *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 91*, 619-621 i 660-664.

MAXWELL, J.C. (1965), *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell*, Vol. 2, Dover, N.Y.

MINKOWSKI H. (1908), «Space and Time». En *The Principle of Relativity*, Methuen, 1923; (Dover, N.Y., 1952), 75-91.

PARRA J.M. (1993), «W.K. Clifford, 1878. L'anella perduda de l'anàlisi vectorial». En: NAVARRO, V.; SALAVERT, V.L.; CORELL, M.; MORENO, E.; ROSSELLO V. (coords.): *Actes de les II Trobades d'Història de la Ciència i de la Tècnica*, 359-377.

PATRONIS, T. ; THOMAIDIS, Y. (1997), «On the Arithmetization of School Geometry in the Setting of Modern Axiomatics», *Science & Education, 6*, 273-290.